

Die Kreisgleichung in der Vektorgeometrie

Der Punkt $X(x|y)$ liegt genau dann auf dem Kreis mit dem Radius r um den Mittelpunkt $M(m_1|m_2)$, wenn eine der folgenden Gleichungen gegeben ist.

Vektorgleichung: $k: |\vec{x} - \vec{m}| = r$ oder $k: (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$

Koordinatengleichung des Kreises: $(x-m_1)^2 + (y-m_2)^2 = r^2$

Beispiel: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right]^2 = 3^2$ bzw. ausmultipliziert: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$. Der Mittelpunkt liegt also bei $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und der Radius beträgt 3 Längeneinheiten.

Aufgaben

Der Mittelpunkt eines Kreises liegt bei $(2|1)$ und der Radius beträgt 5 LE. Stelle eine vektorielle Gleichung und eine Koordinatengleichung auf.

Wie lauten die Gleichungen des Kreises k mit folgenden Eigenschaften:

Eigenschaften	Vektordarstellung	Koordinatendarstellung
a) Kreismittelpunkt: Ursprung; P(0 3) ist ein Punkt von k .	$\sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2}$ $= \sqrt{9} = 3$ $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = 3^2$	$x^2 + y^2 = 9$
b) Kreismittelpunkt: $M(-2 -5)$ und P(1 -1) ist ein Punkt von k .	$\sqrt{(1+2)^2 + (-1+5)^2} =$ $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}\right]^2 = 5^2$	$(x+2)^2 + (y+5)^2 = 25$
c) Kreismittelpunkt: $M(3 -2)$; Der Kreis geht durch den Ursprung.	$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right]^2 = \sqrt{13}^2$	$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$

Kreis und Gerade

Gegeben ist ein Kreis und eine Gerade. Berechne die Schnittpunkte, falls vorhanden.

Kreis: $x^2 + y^2 = 25$
Gerade: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

Einsetzen:

$$x^2 + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}\right)^2 = 25$$

$$x^2 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{25}{9} = 25 \quad | \cdot 9$$

$$9x^2 + x^2 - 10x + 25 = 225 \quad | -225$$

$$10x^2 - 10x - 200 = 0 \quad | :10$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

Lösungen: $x_1 = 4, y_1 = -3 \Rightarrow S_1(4|-3)$
 $x_2 = -5, y_2 = 0 \Rightarrow S_2(-5|0)$

Kreis: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

$$\text{Gerade: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Einsetzen:

$$(3+3s-2)^2 + (4-4s+3)^2 = 25$$

$$(3s+1)^2 + (-4s+7)^2 = 25$$

$$9s^2 + 6s + 1 + 16s^2 - 56s + 49 = 25$$

$$25s^2 - 50s + 50 = 25$$

$$s^2 - 2s + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow s = 1 \quad \text{eingesetzt in } g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Berechne die Schnittpunkte des Kreises mit dem Mittelpunkt $M(3|2)$ und $r = 3$ mit der Geraden, die durch die Punkte $A(1|3)$ und $B(-2|0)$. Verwende unterschiedliche Darstellungen von Kreis und Geraden.

Lösung: Schnittpunkte: $S_1(2|0)$ und $S_2(3|5)$.